Formulario di Geometria Analitica

Indice degli argomenti

Retta

Equazione della retta in forma implicita

$$ax + by + c = 0$$

Se $a = 0$ retta parallela all'asse x, se $b = 0$ retta parallela all'asse y.

Equazione della retta in forma esplicita

$$y = mx + q$$

dove m chiamasi COEFFICIENTE ANGOLARE.

Coefficiente angolare della retta in forma implicita

$$m = -\frac{a}{b}, \quad b \neq 0$$

Se la retta è parallela all'asse x, $m = 0$, se invece è parallela all'asse y, $m = \infty$ (in questo caso diremo che non esiste).

Coefficiente angolare dati due punti della retta

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

dove $P_1(x_1, y_1)$ e $P_2(x_2, y_2)$ sono i punti suddetti.

Angolo formato dalla retta con l'asse x con coefficiente angolare dato

$$\alpha = \arctan m$$

Angolo formato da due rette con coefficienti angolare dati

$$\alpha = \arctan\left(\frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}\right)$$

dove m_1 ed m_2 sono rispettivamente i coefficienti angolari della prima e della seconda retta.

Condizione di parallellismo tra due rette

$$m_1 = m_2$$

Condizione di perpendicolarità tra due rette

$$m_1 = -\frac{1}{m_2}$$

Equazione della retta passante per due punti

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}, \quad x_1 \neq x_2 \text{ e } y_1 \neq y_2$$

dove $P_1(x_1, y_1)$ e $P_2(x_2, y_2)$ sono i punti suddetti.

Equazione della retta passante per un punto e con coefficiente angolare dato

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

dove $P_1(x_0, y_0)$ è il punto suddetto.

Distanza retta punto

$$d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

dove $P_1(x_0, y_0)$ è il punto suddetto.

Distanza tra due punti

$$d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

Punto medio

$$M\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$$

Fascio proprio di rette (rette che hanno un solo punto in comune)

$$y - y_c = m(k)(x - x_c)$$

Il coefficiente angolare varia al variare del paramentro k.

Fascio improprio di rette (fascio di rette parallele)

$$y = mx + q(k)$$

Stavolta, il termine q varia al variare di k.

Circonferenza

Equazione della circonferenza in forma standard

$$(x - x_c)^2 + (y - y_c)^2 = r^2$$

dove $C(x_c, y_c)$ è il centro della circonferenza ed r è il raggio.

Equazione della circonferenza in forma canonica

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$$

dove $a = -2x_c, \quad b = -2y_c, \quad c = x_c^2 + y_c^2 - r^2$

Coordinate del centro

$$C\left(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}\right)$$

Lunghezza del raggio

$$r = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2 - 4c}$$

- CIRCONFERENZA REALE:

  se $a^2 + b^2 - 4c > 0$. In questo caso infiniti sono i punti che appartengono al luogo da essa individuato.

- CIRCONFERENZA DEGENERE:

  se $a^2 + b^2 - 4c = 0$. In questo caso solo un punto appartiene al luogo da essa individuato, ovvero il centro.

- CIRCONFERENZA NON REALE:

  se $a^2 + b^2 - 4c < 0$. In questo caso non esistono punti che appartengono al luogo da essa individuato.

Equazione asse radicale di due circonferenze

Date le circonferenze

$$C: x^2 + y^2 + a_1x + b_1y + c_1 = 0$$
$$C': x^2 + y^2 + a_2x + b_2y + c_2 = 0$$

l'equazione dell'asse radicale è:

$$(a_1 - a_2)x + (b_1 - b_2)y + c_1 - c_2 = 0$$

Parabola

	Parabola con asse di simmetria verticale	**Parabola con asse di simmetria orizzontale**
Equazione	$y = ax^2 + bx + c$	$x = ay^2 + by + c$
Vertice	$V\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$	$V\left(-\frac{\Delta}{4a}, -\frac{b}{2a}\right)$
Fuoco	$F\left(-\frac{b}{2a}, \frac{1-\Delta}{4a}\right)$	$F\left(\frac{1-\Delta}{4a}, -\frac{b}{2a}\right)$
Asse simmetria	$x = -\frac{b}{2a}$	$y = -\frac{b}{2a}$
Direttrice	$y = -\frac{1+\Delta}{4a}$	$x = -\frac{1+\Delta}{4a}$
Equazione con vertice dato	$y - y_v = a(x - x_v)^2$	$x - x_v = a(y - y_v)^2$

Ellisse

Equazione dell'ellisse in forma generale

$$ax^2 + by^2 + cxy + dx + ey + f = 0$$

Equazione dell'ellisse in forma canonica

$$\frac{(x - x_c)^2}{a^2} + \frac{(y - y_c)^2}{b^2} = 1$$

dove $C(x_c, y_c)$ è il centro dell'ellisse e a e b rappresentano rispettivamente le misure del semiasse orizzontale e del semiasse verticale. Per comodità considereremo l'ellisse centrata nell'origine:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Coordinate dei fuochi

$$\text{Se } a^2 > b^2 \Rightarrow \begin{cases} F_1(-c, 0) \\ F_2(c, 0) \end{cases} \qquad \text{con } c = \sqrt{a^2 - b^2}$$

$$\text{Se } a^2 < b^2 \Rightarrow \begin{cases} F_1(0, -c) \\ F_2(0, c) \end{cases} \qquad \text{con } c = \sqrt{b^2 - a^2}$$

Coordinate dei quattro vertici

$$\begin{matrix} V_1(-a, 0) \\ V_2(a, 0) \end{matrix}, \qquad \begin{matrix} V_3(0, b) \\ V_3(0, -b) \end{matrix}$$

Lunghezza dell'asse maggiore e minore

Le lunghezze degli assi sono rispettivamente $2a$ e $2b$.

Eccentricità

$$e = \begin{cases} \frac{c}{a} & \text{se } a^2 > b^2 \\ \frac{c}{b} & \text{se } a^2 < b^2 \end{cases}$$

Iperbole

Condizione di esistenza del luogo geometrico

Siano F_1 ed F_2 i due fuochi e P un punto generico del luogo. Indichiamo con $2c$ la distanza tra i due fuochi (DISTANZA FOCALE) e con $2a$ la differenza costante delle distanze dei punti dell'iperbole dai fuochi.

La condizione affichè il luogo esista è che sia:

$$|\overline{PF_1} - \overline{PF_2}| < F_1F_2 \quad \Leftrightarrow \quad 2a < 2c$$

Condizione di appartenenza di un punto $P(x,y)$ all'iperbole riferita ai propri assi (con fuochi sugli assi)

$$|\overline{PF_1} - \overline{PF_2}| = 2a$$

	Iperbole che interseca l'asse x	**Iperbole che interseca l'asse y**
Equazione canonica con centro in $(0,0)$	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$	$\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$
Vertici reali	$V_1(-a,0) \quad V_2(a,0)$	$V_1(0,-b) \quad V_2(0,b)$
Asintoti	$y = \pm\frac{b}{a}x$	$y = \pm\frac{b}{a}x$
Fuochi $(c = \sqrt{a^2+b^2})$	$F_1(-c,0) \quad F_2(c,0)$	$F_1(0,-c) \quad F_2(0,c)$
Eccentricità $(c = \sqrt{a^2+b^2})$	$e = \frac{c}{a}$	$e = \frac{c}{b}$

Equazione iperbole non centrata nell'origine

Detto $C(x_c, y_c)$ il centro dell'iperbole, si ha:

$$\text{se } a^2 > b^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{(x-x_c)^2}{a^2} - \frac{(y-y_c)^2}{b^2} = 1$$
$$\text{se } a^2 < b^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{(y-y_c)^2}{b^2} - \frac{(x-x_c)^2}{a^2} = 1$$

Iperbole equilatera

Si ottiene quando $a = b$. La lunghezza del semiasse trasverso sarà:

$$a = \sqrt{2|c|}$$

	Iperbole equilatera con $c > 0$	**Iperbole equilatera con $c < 0$**
Equazione canonica con centro in $(0,0)$	$xy = c$	$xy = c$
Fuochi	$F_1\left(-\sqrt{2c}, -\sqrt{2c}\right)$ $F_2\left(\sqrt{2c}, \sqrt{2c}\right)$	$F_1\left(-\sqrt{2(-c)}, \sqrt{2(-c)}\right)$ $F_2\left(\sqrt{2(-c)}, -\sqrt{2(-c)}\right)$
Vertici	$V_1\left(-\sqrt{c}, -\sqrt{c}\right)$ $V_2\left(\sqrt{c}, \sqrt{c}\right)$	$V_1\left(-\sqrt{(-c)}, \sqrt{(-c)}\right)$ $V_2\left(\sqrt{(-c)}, -\sqrt{(-c)}\right)$